සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
Applied Mathematics I

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. O, P, Q යනු ඒකරේඛීය නො වන ලක්ෂ්‍ය තුනකි. R ලක්ෂ්‍යය, OPQ තලයේ පිහිටා ඇත්තේ

$$\overrightarrow{OR} = \alpha\left(\frac{\overrightarrow{OP}}{OP} + \frac{\overrightarrow{OQ}}{OQ}\right)$$

වන පරිදි ය. මෙහි α යනු අදිශයකි. POQ කෝණය OR මගින් සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ B කෝණයේත් C කෝණයේත් අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක L හි දී හමු වෙයි. $\overrightarrow{BL} = \lambda\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු අදිශයකි, $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ හා $c = |\mathbf{c}|$. එබඳු ම ආකාරයකින් $\overrightarrow{CL}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $\overrightarrow{AL}$ සඳහා ස්වායත්ත ප්‍රකාශන දෙකක් ලියා දක්වා

$$\lambda = \frac{ac}{a+b+c} \quad \text{බව ද} \quad \overrightarrow{AL} = \frac{b\mathbf{c} - c\mathbf{b}}{a+b+c} \quad \text{බව ද පෙන්වන්න.}$$

ඒ නයින්, ඕනෑ ම ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක තුන ඒකලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

2. තිත්-ගුණිත දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

$\mathbf{i} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{j} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{k} = \overrightarrow{OC}$ යනු අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් ලම්බ ඒකක දෛශික තුනකි.

α, β, γ යනු $\mathbf{r} = l\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + n\,\mathbf{k}$ දෛශිකය පිළිවෙළින් $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ දෛශික සමග සාදන කෝණයි.

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

බව පෙන්වන්න.

තව ද $\overrightarrow{OP} = l\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ දෛශිකය, $\overrightarrow{OA}$ වත් $\overrightarrow{OB}$ වත් $\overrightarrow{OC}$ වත් සම සේ ආනත බවත් ABC තලයට ලම්බ බවත් පෙන්වන්න. පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී l හි අගය නිර්ණය කරන්න.

(i) ABC තලයේ P පිහිටයි.

(ii) $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් ලම්බයි.

(iii) P ලක්ෂ්‍යය, $OABC$ චතුස්තලයේ ශීර්ෂ හතරේ සිට සමදුරින් වෙයි.

3. **a** හා **b** නිශ්-ශුන්‍ය දෛශික දෙකේ **a** × **b** දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

(i) **a**, **b** හා **c** යනු නිශ්-ශුන්‍ය වූ ද සමාන්තර නොවූ ද දෛශික තුනකි.

$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ නම් $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ බව පෙන්වන්න.

විලෝම වශයෙන්, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ නම්

$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ බව පෙන්වන්න.

ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් සූත්‍ර අපෝහනය කරන්න.

(ii) L, M, N යන ලක්ෂ්‍ය තුන කෙසේ ද යත් $\overrightarrow{OL} = \mathbf{l}$, $\overrightarrow{OM} = \mathbf{m}$ හා $\overrightarrow{ON} = \mathbf{n}$ වන පරිදි වේ.

මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය යි.

$\lambda + \mu + \nu = 0$ ද $\lambda \mathbf{l} + \mu \mathbf{m} + \nu \mathbf{n} = 0$ වන පරිදි වූ λ, μ හා ν යන නිශ්ශුන්‍ය සංඛ්‍යා පවතී නම් $\mathbf{m} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{l} + \mathbf{l} \times \mathbf{m} = 0$ බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{m} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{l} + \mathbf{l} \times \mathbf{m} = 0$ බව දී ඇති නම් L, M, N ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය වන බව පෙන්වන්න.

4. දිග $2a$ ද බර W ද වූ ඒකාකාර සුමට AB දණ්ඩට, එහි අචල A කෙළවර වටා සුචල ලෙස හැරෙන්නට පුළුවන. බර $2W$ වූ කුඩා සුමට C මුද්දකට දණ්ඩ දිගේ සර්පණය විය හැකි ය. A ලක්ෂ්‍යය මෙන් එකම සිරස් මට්ටමේ පිහිටි D අචල ලක්ෂ්‍යයකට මුද්ද ඇදා ඇත්තේ $\frac{a}{4}$ දිගෙන් යුත් අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි.

තන්තුවත් දණ්ඩත් එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. $AD = \frac{a}{4}$. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී දණ්ඩ හා මුද්ද අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයා දණ්ඩ සිරස සමග $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.
තන්තුවේ ආතතියත්, A කෙළවරේ ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.

5. Oxy තලයේ පිහිටි $A_r \equiv (x_r, y_r)$ ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරන ඒකතල බල පද්ධතියට (X_r, Y_r), $r = 1, 2, 3, \ldots, n$ සංරචක තිබේ. $P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යය වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණය $G - Yx + Xy$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $X = \sum_{r=1}^{n} X_r$, $Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r$ හා $G = \sum_{r=1}^{n} (Y_r x_r - X_r y_r)$.

$X^2 + Y^2 \neq 0$ බව දී තිබේ නම්, පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයෙහි ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය අපෝහනය කරන්න.

$A \equiv (2a, 0)$ ලක්ෂ්‍යය වටා හා $B \equiv (0, a)$ ලක්ෂ්‍යය වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණ පිළිවෙළින් H හා $2H$ වේ. $y = x$ රේඛාවට සමාන්තර විභේදිත කොටස්වල ඓක්‍යය ශූන්‍යය යි. පද්ධතිය සඳහා X, Y හා G සොයා සම්ප්‍රයුක්තය, $x + y = 3a$ රේඛාව ඔස්සේ ක්‍රියා කරන $\frac{H}{a}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$ බලයක් බව පෙන්වන්න.
මෙහි **i**, **j** යනු පිළිවෙළින් Ox, Oy අක්ෂ ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික යි.

6. එක එකක දිග a ද බර W ද වූ AB, BC, CD යන සමාන ඒකාකාර දඬු තුනක්, දිග $2a$ ද බර $2W$ ද වූ ඒකාකාර AD දණ්ඩක් A, B, C, D ලක්ෂ්‍යවල දී සුමට ලෙස අසව් කර තිබේ. BC හි මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලූ රාමුසැකිල්ල සමතුලිතතාවේ පවතියි. A හා B සන්ධිවල දී AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවල විශාලත්ව හා දිශා සොයා ඒවායේ ක්‍රියා රේඛා BC ට පහළින් $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ගැඹුරක දී හමුවන බව පෙන්වන්න.

7. (i) අරය a ද පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ ද වූ ඒකාකාර අර්ධ-ගෝලීය කබොළකත්,

(ii) උස h ද අර්ධ-සිරස් කෝණය α ද පෘෂ්ඨික ඝනත්වය $k\sigma$ ද වූ ඒකාකාර කුහර කේතුවකත්

ස්කන්ධය හා ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අනුකලනයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ සොයන්න.

$a = h \tan\alpha$ බවත් පෘෂ්ඨ දෙක, පොදු වෘත්තයෙන් දෙපස පිහිටන පරිදි ඒවායේ වෘත්ත දාර දිගේ එකට මූට්ටු වී ඇති බවත් දී තිබේ.

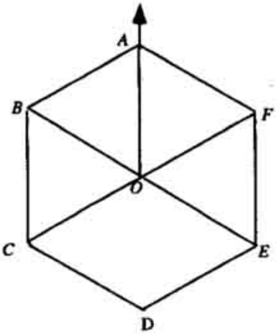
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{36 + k^2} - k}{6}$$

නම්, අර්ධ-ගෝලීය පෘෂ්ඨයේ ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක් සුමට තිරස් තලයක් සමග ස්පර්ශ වෙමින් සංයුක්ත වස්තුවට සමතුලිතතාවේ පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න.

8. ඒකාකාර බර දණ්ඩක W බර, දණ්ඩේ අන්ත දෙකේ ඇති $\frac{W}{2}$ හා $\frac{W}{2}$ බර දෙකකට තුල්‍ය බව (දෙකකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකි බව) පෙන්වන්න.

$ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රය තනා ඇත්තේ එක සමාන බර, ඒකාකාර දඬුවලිනි. A, B, C, E, F ශීර්ෂ පහ පිළිවෙළින් OA, OB, OC, OE හා OF සැහැල්ලු දඬුවලින් O කේන්ද්‍රයට යා කර ෂඩස්‍රය A ගෙන් එල්ලා තිබේ.

බෝ අංකනය යොදා ගෙන ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින් සැහැල්ලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කර ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න වර්ග කර දක්වන්න.



(1 වැනි රූපය)

9. එක එකක් $2a$ දිගින් යුත් AB, BC සමාන ඒකාකාර දඬු දෙකක් එකිනෙකට සෘජුකෝණී වන පරිදි B හි දී දෘඪ ලෙස සන්ධි කර, a අරයෙන් යුත් අවල රළු තිරස් වෘත්ත සිලින්ඩරයක් මත තබා ඇත්තේ තිරසට සම සේ ආනතව ද ABC තලය සිලින්ඩරයේ අක්ෂයට ලම්බව ද පිහිටන පරිදි ය. W, W සමාන බර A හි දීත් C හි දීත් එල්ලා පද්ධතිය සමතුලිතව පවතියි.

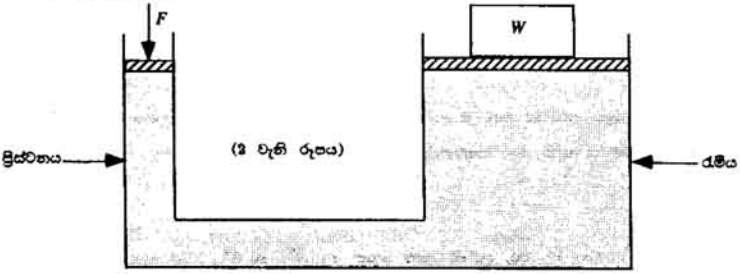
එක් එක් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ **අඩුතම** අගය $\frac{W\sqrt{2}}{1+\mu}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු ඝර්ෂණ සංගුණකය යි.

සීමාකාරී සමතුලිතතාවක් පවතින පරිදි w අමතර බරක් පරෙස්සමින් A ගෙන් එල්ලුවහොත්

$$\frac{w}{W} = \frac{2\mu}{\mu^2 - \mu + 1}$$

බවත් w ට $2W$ ඉක්මවිය නොහැකි බවත් පෙන්වන්න.

10. (අ) තිරස් වර්ගයේ ද්‍රාව ජැක්කුවක රැම්යේ හරස්කඩ වර්ගඵලය, පිස්ටනයේ හරස්-කඩ වර්ගඵලය මෙන් n ගුණයකි. (2 වැනි රූපය) ඝර්ෂණය හේතු කොට ගෙන පිස්ටනයේ කරබඳතින් රැම්යේ කරබඳතින් ඇති වන ප්‍රතිරෝධය පිළිවෙළින් R kg හා S kg වෙයි. F kg තිරස් බලයක් පිස්ටනයට යෙදුවොත් රැම්යෙන් එසවිය හැකි W බර සොයන්න.



(2 වැනි රූපය)

(ආ) අර්ධ-ගෝලීය කබොල දෙකක් එකට මූට්ටු කිරීමෙන් ගෝලීය කුහර බඳුනක් තනා ඇත. මූට්ටුවේ තලය තිරස් ව පිහිටන සේ බඳුන තබා එම තිරස් තලයට ඉහළින් h උසකට එන තෙක් ρ ඝනත්වයෙන් යුත් ද්‍රවයක් බඳුනට දමනු ලැබෙයි. පහළ අර්ධ ගෝලයෙන් ඉහළ අර්ධ ගෝලය එසවීමට යත්න දරන $\frac{1}{3}\pi\rho g h^3$ බලයක් ද්‍රවයේ පීඩනයෙන් හට ගන්නා බව පෙන්වන්න.

11. අර්ධ-වෘත්තාකාර ආස්තරයක් එහි ඍජු දාරය ද්‍රව-පෘෂ්ඨයේ පවතින සේ සිරස් ලෙස ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත. ආස්තරයේ පීඩන කේන්ද්‍රය $\frac{3\pi a}{16}$ ගැඹුරක පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි a යනු ආස්තරයේ අරය යි.

වෘත්ත හරස්කඩක් සහිත තිරස් නළයක එක් කෙළවරක් වසා ඇත්තේ, නළයේ එම කෙළවරේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයට සුමට ලෙස අසවු කළ සිරස් වෘත්තාකාර දොරක් මගිනි. අනික් කෙළවර දෘඪ ලෙස වසා ඇත. ρ ඝනත්වයෙන් යුත් නිශ්චලතාවයේ ඇති ද්‍රවයකින් නළයේ බාගයක් පිරී ඇති විට, දොර වැසී තිබීම සඳහා දොරේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයට යෙදිය යුතු අඩුතම බලය සොයන්න.

12. ද්‍රවස්ථිතිකයේ එන ආකිමිඩීස් මූලධර්මය සඳහන් කරන්න.

ඒකාකාර ප්‍රිස්මයක හරස් කඩ, අසමාන පාද සහිත සෘජුකෝණාස්‍රයකි. සම්මුඛ දාර දෙකක් පෘෂ්ඨයේ තිබෙන පරිදි ප්‍රිස්මය ජලයේ ඉපිලෙන්නේ ජලයෙන් උඩ තිබෙන දාරයේ මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යයට ඈඳූ තන්තුවක ආධාරයෙනි. පහත සඳහන් ප්‍රතිඵල තහවුරු කරන්න.

(i) තන්තුව සිරස් ය.

(ii) ප්‍රිස්මයේ විශිෂ්ට ගුරුත්වය $\frac{2}{3}$ කි.

(iii) තන්තුවේ ආතතිය ප්‍රිස්මයේ බරෙන් හතරෙන් එකකි.