සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

18277

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

(01) ශුද්ධ ගණිතය II
(01) Pure Mathematics II

01	
S	II

පැ තුනයි/Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) OAB, OCD සරල රේඛා දෙක A, B, D, C ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තයක් ඡේදනය කරයි. මෙහි O, බාහිර ව පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. X හිදී දික් කළ DA හමු වන සේ CB ට සමාන්තර ව O හරහා රේඛාවක් අඳිනු ලැබේ. $OX^2 = AX \cdot DX$ බව සාධනය කරන්න.

   (ii) O යනු ABC ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි පිහිටි ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයකි. AO, BO, CO රේඛා BC, CA, AB පිළිවෙලින් D, E, F හිදී හමු වේ නම්,

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$$

බව සාධනය කරන්න.

ABC යනු B හිදී සෘජු කෝණයක් සාදන ත්‍රිකෝණයකි. B සිට AC ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය L ද, L සිට BC සහ AB ට ඇඳි ලම්බවල අඩි පිළිවෙළින් M සහ N ද වේ. AM සහ CN රේඛා O හි දී හමු වන්නේ ද BO රේඛාව P හිදී AC හමු වන්නේ ද නම්,

(i) $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$

(ii) $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AB^4}{BC^4}$

බව සාධනය කරන්න.

2. (i) සමාන්තරාස්‍රිකයක විකර්ණ ඒකලක්ෂ්‍ය බව ද එකිනෙක සමච්ඡේදනය කරන බව ද පෙන්වන්න.

   (ii) $OABC$ චතුස්තලයක OA, OB, OC දර එකිනෙකට ලම්බ වන අතර පිළිවෙලින් a, b, c ට සමාන වේ. OAB මුහුණතට ABC මුහුණතේ ආනතිය

$$\tan^{-1}\left(\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

$ABCDD'C'B'A'$ සෘජුකෝණාස්‍ර සමාන්තරාස්‍රිකයක $A'B'C'D'$ මුහුණත $ABCD$ මුහුණතට සමාන්තර වන අතර AA', BB', CC', DD' දර $ABCD$ මුහුණතට ලම්බ වේ. P, Q, R යනු පිළිවෙළින් AB, BD', DD' හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

$AA' = a$ ද $AB = b$ ද $AD = c$ ද නම් $ABCD$ මුහුණත සමඟ PQR තලය සාදන කෝණය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. P ලක්ෂ්‍යයක දී ඡේදනය වන l_1, l_2 සරල රේඛා පිළිවෙළින් $ax + by + c = 0$ සහ $a'x + b'y + c' = 0$ සමීකරණවලින් නිරූපණය වේ. λ පරාමිතියක් වන විට,

$$ax + by + c + \lambda (a'x + b'y + c') = 0$$

සමීකරණය විවරණය කරන්න.

l_1, l_2 ට සමාන්තර ව O මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා වූ සරල රේඛා පිළිවෙළින් Q සහ R හිදී l_2, l_1 ඡේදනය කරයි. $OQPR$ සමාන්තරාස්‍රයේ OP, QR විකර්ණවල සමීකරණ සොයන්න. $(c, c' \neq 0)$
එනයින්,

(i) $OQPR$ රොම්බසයක් වීම සඳහාත්

(ii) $OQPR$ සමචතුරස්‍රයක් වීම සඳහාත්

a, b, c, a', b', c' නියත මගින් සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යතා නිර්ණය කරන්න.

4. (අ) (r, θ) ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සිට කාටීසියානු ඛණ්ඩාංකවලට හැරවීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$\frac{2a}{r} = \cos\theta + 2\sin\theta \qquad (a > 0)$$

මගින් l සරල රේඛාවක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

එක ම සටහනෙහි, l හිත් $C : r = a(1 + \cos\theta)$ වක්‍රයේත් කටු සටහන් ඇඳ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සඳහන් කරන්න.

(ආ) $y = x^2 - 1$ වක්‍රයේ කටු සටහනක් ඇඳ එනයින්, $y = |x^2 - 1|$ හි කටු සටහනක් වෙන ම රූ සටහනක අඳින්න.

එක ම දළ රූ සටහනක $y = |x^2 - 1|$ සහ $y = |x^2 - 7|$ වක්‍ර ඇඳීමෙන්,

$$|x^2 - 7| > y > |x^2 - 1|$$

සපුරාලන පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

5. (i) $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය සහ $l \equiv px + qy + r$ සරල රේඛාව A සහ B හිදී එකිනෙක ඡේදනය කරයි. λ පරාමිතියක් විට, $S + \lambda l = 0$ සමීකරණය විවරණය කරන්න.

$$S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 2y - 17 = 0 \quad \text{සහ} \quad l \equiv x - y + 2 = 0$$

විට, AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

S' වෘත්තයත් $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ වෘත්තයත් බාහිර ව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

(ii) S වෘත්තය $(2, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අතර $S' : x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තය මත පිහිටි විෂ්කම්භාන්තවල දී S' ඡේදනය කෙරේ. $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ වෘත්තය සහ S වෘත්තය සෘජුකෝණී ලෙස ඡේදනය වේ නම්, S හි සමීකරණය ලබා ගන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට $(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයා පරාවලයේ නාභියේ සිට ස්පර්ශකයට අඳින ලද ලම්බයේ අඩිය සැම විට ම y – අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

l_1, l_2, l_3 වනාහි පරාවලයකට ඇඳි ස්පර්ශක තුනකි. ඉහත ප්‍රතිඵලය යොදා ගෙන ජ්‍යාමිතික ක්‍රමයකින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, l_1, l_2, l_3 මගින් සෑදෙන ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ හරහා වූ වෘත්තය, පරාවලයේ නාභිය හරහා යන බව පෙන්වන්න.

7. එය මත පිහිටි (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයක දී $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය,

$$a^2y_1\,x - b^2x_1\,y + (b^2 - a^2)\,x_1y_1 = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$$(a^2 - b^2)^2\, l^2\, m^2 - (b^2\, l^2 + a^2\, m^2)\, n^2 = 0$$

වන්නේ නම්, $lx + my + n = 0$ රේඛාව ඉලිප්සයට අභිලම්බයක් වන බව සාධනය කර අභිලම්බය වක්‍රය කපන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ප්‍රථම ඉලිප්සය, එහි කේන්ද්‍රය වටා සෘජු කෝණයකින් ස්වකීය තලයේ භ්‍රමණය කිරීමෙන් දෙවැනි ඉලිප්සයක් ලැබේ. ඉලිප්ස දෙකට ම පොදු වූ අභිලම්බවල සමීකරණ සොයන්න.

8. P ලක්ෂ්‍යයක සිට $x + y = \sqrt{2}$ සරල රේඛාවට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය Q ද $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ඛණ්ඩාංක සහිත ලක්ෂ්‍යය S ද වේ.

$SP^2 = 2\ QP^2$ වන පරිදි P විචලනය වන්නේ නම්, එහි පථය කවරෙක් ද යන වග හඳුන්වා දෙන්න.

$xy = 1$ බහුවලයට $\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම ස්පර්ශකය x අක්ෂය A හිදී ද y අක්ෂය B හිදී ද ඡේදනය කරනු ලැබේ. C යනු $AC : CB = a : b$ වන පරිදි AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යි. t විචලනය වන විට, C හි පථයේ සමීකරණය සොයන්න.

$x + y = \sqrt{2}$ සරල රේඛාව C හි පථයට ස්පර්ශකයක් වන සේ $a : b$ අනුපාතයට ගත හැකි අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

9. ඕනෑ ම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා, සුපුරුදු අංකනයකින්,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

බව සාධනය කරන්න.

D යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි ත්‍රිකෝණයේ BC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.

$B\hat{A}D = \alpha$, $C\hat{A}D = \beta$ සහ $C\hat{D}A = \theta$ නම්,

$$\begin{aligned}(m + n)\cot\theta &= m\cot\alpha - n\cot\beta \\ &= n\cot B - m\cot C\end{aligned}$$

බව සාධනය කරන්න.

F යනු AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද L යනු A ශීර්ෂයේ සිට BC පාදයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය ද වේ. P හිදී CF සහ AL ඡේදනය වේ.

$$\tan A\hat{P}F = \frac{2 - \cot B\,(\cot A - \cot B)}{\cot A + \cot B}$$

බව සාධනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (අ) $\cos(A + B)$ සඳහා සම්මත සූත්‍රය යොදා, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ බව පෙන්වන්න.

$\cos 2\theta \tan\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

$2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta \equiv \cos 2\theta - \cos 4\theta$ සර්වසාම්‍යය සාධනය කර එ නයින්,

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

බව පෙන්වන්න.

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ බව අපෝහනය කර $\cos\frac{3\pi}{5}$ සඳහා අගයක් ලබා ගන්න.

(ආ) $\tan(A - B) \equiv \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ සර්වසාම්‍යය සාධනය කරන්න.

x සඳහා, පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $\tan x - \tan(x - \alpha) = \tan\alpha, \quad \alpha \neq 0$

(ii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(2x) = \frac{\pi}{4}$

11. X සහ Y විචල්‍ය $Y = \dfrac{X - a}{b}$ වන පරිදි වේ ; මෙහි a සහ b ඥාත නියත වේ.

$\overline{X} = a + b\,\overline{Y}$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි "$\overline{\ \ }$" යන්නෙන් සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය හැඳින්වේ.

A ගමකින් හා B ගමකින් අහඹු ලෙස තෝරා ගත් පවුල් 98 ක මාසික ආදායම පහත දැක්වෙන වගුවෙන් ගෙන දේ.

රු. 100 යේ ඒකකවලින් මාසික ආදායම	පවුල් සංඛ්‍යාව	
	A ගම	B ගම
5—10	1	5
10—15	10	6
15—20	20	15
20—25	8	10
25—30	6	5
30—35	3	4
35—40	1	2
40—45	0	2

එක් එක් ගමක් සඳහා මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යකය සහ මාතය සොයා ඔබේ ප්‍රතිඵල ගැන විවේචනයක් කරන්න.

12. A, B ක්‍රීඩකයන් දෙදෙනෙකු ටෙනිස් තරඟයක යෙදේ. ඔවුන් අතරෙන් කෙනෙකු ක්‍රීඩා වාර (sets) දෙකක් දිනන තෙක් තරඟය පැවැත්වේ. ඕනෑ ම ක්‍රීඩා වාරයක් A දිනීමේ සම්භාවිතාව 0.40 වේ.

(අ) (i) A තරඟය දිනීමේ

(ii) අනුගාමී ක්‍රීඩා වාර දෙකකින් B පරාජය කිරීමෙන් A තරඟය දිනීමේ

සම්භාවිතාවන් සොයන්න.

(ආ) තරඟයේ දී ක්‍රීඩා කෙරුනු ක්‍රීඩා වාර ගණන X සසම්භාවී විචල්‍යයෙන් හැඳින්වේ නම්, X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයා, එනයින් තරඟයක දී ක්‍රීඩා කෙරෙන අපේක්ෂිත ක්‍රීඩා වාර ගණන (X හි මධ්‍යන්‍යය) සොයන්න.

(ඇ) එක් ක්‍රීඩා වාරයකට පැය එකහමාරක කාලයක් ගත වන අතර, ක්‍රීඩා සංගමය මගින් සපයන පහසුකම් සඳහා සංවිධායක කමිටුව පැයකට රු. 1000/= ක් ගෙවිය යුතු ය. තරඟය සඳහා වැය වන මුදල Y සසම්භාවී විචල්‍යයෙන් දක්වේ නම් Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයා, එනයින් අපේක්ෂිත වියදම (Y හි මධ්‍යන්‍යය) සොයන්න.