සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

18277

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

(01) ශුද්ධ ගණිතය I (01) Pure Mathematics I	**01** **S I**

පැය තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $\dfrac{4}{2.3.4} + \dfrac{7}{3.4.5} + \dots + \dfrac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \dots$

ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඉහත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, අනන්තය තෙක් ඓක්‍යය සොයන්න.

(ii) ඕනෑ ම n ධන නිඛිලයක්, $5m$, $5m \pm 1$, $5m \pm 2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි m යනු නිඛිලයකි. එ නයින්, n^2 ආකාරයේ ඕනෑ ම නිඛිලයක් 5 න් බෙදූ විට ශේෂය 0, 1, 4 අතුරින් එකක් වන බව අපෝහනය කරන්න.

2. (අ) $x, y \neq 0$ වන පරිදි වූ x, y, λ, μ තාත්ත්වික රාශි,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2, \quad x + y = \lambda, \quad \frac{y}{x} = \mu$$

සම්බන්ධතා මඟින් සැබඳේ.

λ සහ μ අතර සම්බන්ධතාවක් ලබා ගෙන, μ තාත්ත්වික වන පරිදි වූ λ හි අගය කුලකය සොයන්න.

එ නයින්, $\lambda = 3$ විට, $\dfrac{y}{x}$ නිර්ණය කරන්න.

(ආ) $x, a, b > 0$, $a > b$ සහ $x^2 > ab$ විට,

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}} > 0$$

බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $|2x - 1| < 3x + 5$

වන පරිදි වූ x හි අගයන්ගෙන් සමන්විත කුලකය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (i) $t = x + \frac{1}{x}$ යයි ලියමින් $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල සියල්ල ම සොයන්න.

(ii) $E = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$ යයි ගනිමු. $y^2 + y + a$ ආකාරයෙන් E ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි a නියතයක් ද y යන්න b හා c නියතයන් වන $x^2 + bx + c$ ආකාරයෙන් ද වේ. ඒ නයින් සියලු ම තාත්ත්වික x සඳහා $E \geqslant 3$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)^3} = \dfrac{k}{x-2} + \dfrac{f(x)}{(x-1)^3}$ වන සේ k නියතයක් සහ x හි ශ්‍රිතයක් වන f සොයන්න. $(x - 1)$ හි බහුපදයක් ලෙස $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)^3}$ හි භින්න භාග සොයන්න.

4. නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
$z \neq 1$ විට,

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} \equiv \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

බව පෙන්වන්න.

$z \neq 0$ විට, ඉහත සර්වසාම්‍යයේ දකුණු පැත්ත

$$\frac{z^{-1} - (n+1)z^{n-1} + nz^n}{z^{-1} + z - 2}$$

ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස ගැනීමෙන් හා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, θ හි අගය 2π හි නිඛිලමය ගුණාකාරයක් නොවන විට,

$$1 + \sum_{r=2}^{n} r\cos(r-1)\theta = \frac{(n+1)\cos(n-1)\theta - n\cos n\theta - \cos\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

බව පෙන්වන්න.

5. ආර්ගන් රූ සටහනෙහි, z සහ z' සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P සහ P' මගින් ද $z - z'$ සංඛ්‍යාව Q මගින් ද නිරූපණය වන්නේ නම්, OQ යන්න $P'P$ ට සමාන හා සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

B සහ C හි කෝණ එක එකක් $\frac{\pi - \alpha}{2}$ වන සේ වූ ABC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක A, B, C ශීර්ෂ මගින් පිළිවෙලින් z_1, z_2, z_3 සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ.

$$(z_3 - z_2)^2 = 4(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

බව සාධනය කරන්න.

6. එකිනෙකට වෙනස් පොත් දහයක් (කොළ පාට හතරක්, නිල් පාට හතරක් සහ රතු පාට දෙකක්) රාක්කයක් මත පිළියෙල කර ඇත. එක එක් අවස්ථාවේ දී සියලු ම ආගණන කාර්යය පැහැදිලි ලෙස දක්වමින්

(i) පාට සහ අනුපිළිවෙල නොසලකා හරි නම්
(ii) එක ම පාටින් යුත් පොත් සැම විට ම එක ළඟ තබා ඇත්නම්
(iii) එක ම පාටින් යුත් පොත් සැම විට ම එක ළඟ එක ම අනුපිළිවෙලට තබා ඇත් නම්
(iv) කොළ පාට පොත් සැම විට ම එක ළඟ එක ම අනුපිළිවෙලට සිටින සේ ද රතු පාට පොත් සැම විට ම වෙන් වෙන් ව සිටින සේ ද තබා ඇත් නම්

රාක්කය මත පොත් පිළියෙල කළ හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

7. n ධන නිඛිලයක් විට, සුපුරුදු අංකනයකින්,

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + \ldots + {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r + \ldots + x^n$$

බව සාධනය කරන්න.

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12} \text{ හි ප්‍රසාරණයේ } x \text{ හි සංගුණකය සොයන්න.}$$

$(1 - x^2)^n = (1 - x)^n (1 + x)^n$ හි දෙපැත්ත ම ප්‍රසාරණය කර,

$$C_o\, C_r - C_1\, C_{r-1} + C_2\, C_{r-2} + \ldots + (-1)^r\, C_r\, C_o = 0, \; r \text{ ඔත්තේ විට}$$

$$= (-1)^{\frac{r}{2}}\, C_{\frac{r}{2}}, \; r \text{ ඉරට්ටේ විට}$$

බව පෙන්වන්න ; මෙහි $(1 + x)^n = C_0 + C_1 x + C_2\, x^2 + C_3\, x^3 + \ldots + C_n\, x^n$

8. (i) f යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් ද $f(x) > 0$ ද නම්, x විෂයයෙන් $\sqrt{f(x)}$ හි ව්‍යුත්පන්නය ප්‍රමූලධර්ම වලින් ලබා ගන්න.

(ii) x විෂයයෙන් $\tan^{-1} x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.
$x = \tan\theta$ යයි ගැනීමෙන් හා x විෂයයෙන් $\tan^{-1} x$ හි ව්‍යුත්පන්නය උපයෝගී කර ගනිමින් x විෂයයෙන්

$\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$ සහ $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 + x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නයන් සොයන්න.

$\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 + x^2}\right)$ විෂයයෙන් $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නය අපෝහනය කරන්න.

(iii) $y = \{\sin^{-1} x\}^2$ නම් $(1 - x^2)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$ බව පෙන්වන්න.

$(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

9. (අ) $a > 0$ නම්, $\dfrac{d}{dx}(a^x)$ ලබා ගෙන,

c නියතයක් විට, $\displaystyle\int_0^c \frac{a^x}{a^x + 1}\, dx$ අගයන්න.

$0 \leqslant c \leqslant \frac{\pi}{2}$ විට,

$$I = \int_{-c}^{c} \frac{\cos x\; dx}{1 + a^x} \quad \text{සහ}$$

$$J = \int_{-c}^{c} \frac{a^x \cos x\; dx}{1 + a^x} \quad \text{නම්,}$$

(i) $t = -x$ ආදේශය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $I = J$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $I + J$ ලබා ගන්න.

එ නයින් $c = \frac{\pi}{6}$ විට J හි අගය ලියන්න.

(ආ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2 + x)^{\frac{1}{2}}\,(2 - x)^{\frac{3}{2}}}$ අගයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (i) $-1 < x < 1$ විට, $\ln(1+x)$ සඳහා මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right)$$

බව පෙන්වා, $y > 0$ විට,

$$\ln y = 2\left\{\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \dots\right\}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

$\ln 2$ සඳහා ශ්‍රේණියේ මුල් පද 3 ලියා, එහි අගය සාර්ථාංක 3 කට අගයන්න.

(ii) සිම්සන් නීතිය සඳහන් කරන්න.

$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලබා ගැනීම පිණිස, කෝටික පහක් ගෙන එම නියමය යොදන්න.

11. C වක්‍රයක්,

$$x = \frac{at^3}{t-1},\ y = \frac{a(t^2-3)}{t-1},\ t \geqslant 0\ (t \neq 1)$$ පරාමිතික සමීකරණවලින් ගෙන දේ.

(i) $\frac{3}{2}$ හරහා t වැඩි වන විට, $\frac{dx}{dt}$ හි ලකුණ වෙනස් වන බව ද,

(ii) සියලු ම t සඳහා, $\frac{dy}{dt}$ එක ම ලකුණ ගන්නා බව ද

පෙන්වන්න.

$t \geqslant 0\ (t \neq 1)$ සඳහා, එක ම රූප සටහනෙහි, t ට ඉදිරි ව x ද t ට ඉදිරි ව y ද වක්‍රවල කටු සටහන් අඳින්න. එ නයින්, C වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

12. $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ නම්,

$y = f(x)$ සහ $y = \frac{1}{f(x)}$ වක්‍රවල කටු සටහන් එක ම රූප සටහනෙහි අඳින්න. ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ඇතොත් ඒවායේ ඛණ්ඩාංක සඳහන් කරන්න.

(i) ඉහත වක්‍ර දෙකින් අන්තර්ගත වන R පරිමිත පෙදෙසේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

(ii) R පෙදෙස y අක්ෂය වටා π රේඩියන් හරහා භ්‍රමණය වීමෙන් ලැබෙන පරිභ්‍රමණ ඝනයේ පරිමාව නිර්ණය කරන්න.