සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved)

18079

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය I (02) Applied Mathematics I	02 S I

පැ තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A, B සහ C ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ සහ $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ වෙයි. $\alpha + \beta = 1$ ම නම් පමණක් A, B සහ C ඒකරේඛීය බව සාධනය කරන්න.

OPQ යනු ත්‍රිකෝණයකි; $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$. A යනු $\frac{PA}{QA} = \lambda\ (>1)$ වන පරිදි දික් කළ PQ පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි ; B, C යනු $\frac{OB}{BP} = \gamma\ (>0)$ ද $\frac{QC}{CO} = \mu\ (>0)$ ද වන පරිදි පිළිවෙලින් OP ත් OQ ත් පාද මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය යි.

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ද $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ ද නම් $\mu\gamma\,(1-\lambda)\,\mathbf{a} - \mu\,(1+\gamma)\,\mathbf{b} + (1+\mu)\,\mathbf{c} = (1-\lambda\mu\gamma)\,\mathbf{q}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\lambda\mu\gamma = 1$ ම නම් පමණක් A, B, C ඒකරේඛීය බව අපෝහනය කරන්න.

2. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ නිශ් - ශුන්‍ය දෛශික දෙකක් $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$ අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

(අ) පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී $\mathbf{a}$ ත් $\mathbf{b}$ ත් අතර කෝණය සොයන්න :

(i) $\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$ සහ $|\mathbf{b}| = 2\,|\mathbf{a}|$

(ii) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

(ආ) A, B, C, D යනු චතුස්තලයක ශීර්ෂ වෙයි. AD ට BC ලම්බ නම් ද BD ට CA ලම්බ නම් ද CD ට AB ලම්බ බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න

3. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ නිශ්‍ශූන්‍ය දෛශික දෙකක් $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

$Oxyz$ යනු සුරත් සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය ඛණ්ඩාංක පද්ධතියකි. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ යනු පිළිවෙලින් Ox, Oy, Oz අක්ෂවල ධන දිශා ඔස්සේ වන ඒකක දෛශික යි.

(i) $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$ හා $\mathbf{k}$ දෛශිකවල එම අනුපිළිවෙල අනුව දෛශික ගුණිතය, සොයන්න.

(ii) $\overrightarrow{AC} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ත් $\overrightarrow{BD} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ත් විකර්ණ ලෙස ඇති $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\sqrt{42}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් P නම් ලක්ෂ්‍යයෙක පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ වෙයි නම්, Q ලක්ෂ්‍යයේ $\mathbf{q}$ පිහිටුම් දෛශිකය, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ හා $\mathbf{k}$ ඇසුරින් සොයන්න. මෙහි,

$$\mathbf{q} = \overrightarrow{OQ} = \mathbf{k} \times \mathbf{p} \text{ වෙයි.}$$

තව ද, $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \mathbf{k}$ නම්, $z = 0$ තලය මත වන $x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තය මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටන බව පෙන්වන්න.

4. බර W වූ AB දණ්ඩක්, අරය r ද, කේන්ද්‍රය C ද වූ සුමට අවල අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් තුළ **සම්පූර්ණයෙන් ම** පිහිටන පරිදි, නිශ්චල ව පිහිටා ඇත. AB දණ්ඩෙ G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මගින් දණ්ඩ a හා b කොටස් දෙකට බෙදු තිබෙයි. මෙහි $b > a$ ද $r > \sqrt{ab}$ ද වෙයි. සමතුලිතා පිහිටීමේ දී තිරසට දණ්ඩෙ ආනතිය θ නම්,

$$\sin\theta = \frac{b - a}{2\sqrt{r^2 - ab}} \text{ බවත් } CG = \sqrt{r^2 - ab} \text{ බවත් පෙන්වන්න.}$$

පාත්‍රයත් දණ්ඩත් අතර ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

5. A නම් ලක්ෂ්‍යයක් වටා, විශාලත්වයෙන්, දිශාවෙන් හා ක්‍රියා රේඛාවෙන් $\overrightarrow{BC}$ මගින් නිරූපණය කැරෙන බලයෙක ඝූර්ණයේ විශාලත්වය, ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් බව සාධනය කරන්න.

$ABCD$ යනු ත්‍රපිසියමකි ; එහි AD හා BC සමාන්තර ද, E, F යනු පිළිවෙලින් AD හා BC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ද වෙයි.

විශාලත්වයෙන්, දිශාවෙන් හා ක්‍රියා රේඛාවෙන් $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{DB}$ මගින් නිරූපණය කැරෙන බල හයකින් පද්ධතියක් සමන්විත වෙයි. P යනු දික් කළ DA මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් නම්, P වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණයේ විශාලත්වය

$$\frac{4\,|\,AP - BF\,|\,S}{AD + BC}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි S යනු $ABCD$ ත්‍රපිසියමේ වර්ගඵලය යි.

පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලයත් එහි ක්‍රියා රේඛාවට AD හමු වන පිහිටීමත් සොයන්න.

6. එක එකක බර W වන AB හා BC සමාන ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හි දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර තිබෙයි. ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ඈඳනු ලැබූ අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවේ දිග කොතෙක් ද යත් එය නොවක් ව ඇති විට ABC කෝණය සෘජුකෝණයක් වන පරිදි ය. පද්ධතිය නිදහස් ලෙස A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇති නම් ද එය සමතුලිතතා පිහිටීමේ තිබෙයි නම් ද සිරසට AB ගේ ආනතිය $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$ බවත් තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3W}{\sqrt{5}}$ බවත් පෙන්වන්න.

BC දණ්ඩ මත B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව BC ඔස්සේ ක්‍රියා කරන බව ද පෙන්වන්න.

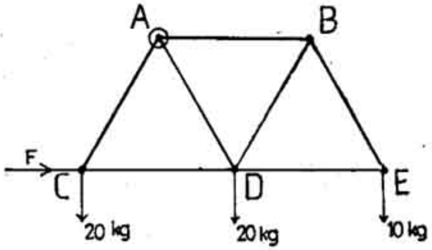
7. අරය a ද, O කේන්ද්‍රයේ දී රේඩියන් 2θ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නා වූ ද, ACB ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මධ්‍ය අරය මත පිහිටන බවත් $OG = a\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$ බවත් පෙන්වන්න.

එක ම ඒකාකාර කම්බියෙන් ලබා ගත් එහෙත් වෙනස් අර සහිත වෘත්තාකාර කැබැලි දෙකක් අතුරෙන් එකකින් S_1 අර්ධ වෘත්තයක් ද, අනෙකින් කේන්ද්‍රයේ දී රේඩියන් 2θ $(<\pi)$ කෝණයක් ආපාතනය කැරෙන S_2 වෘත්ත චාපයක් ද එකට තබා ඇත්තේ ළසඳක් (crescent) සැදෙන පරිදි ය. θ කෝණය කෙසේ ද යත් ළසඳෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය S_2 ඇතුළු චාපය මත පිහිටන පරිදි වෙයි නම්,

$$\sin^2\theta - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\sin\theta + \frac{\pi}{4}\sin 2\theta = \theta$$

බව සාධනය කරන්න.

8.



$A, B, C, D, E,$ ලක්ෂ්‍යවල දී සුවල ලෙස සන්ධි කළ සමාන ලුහු දඬු හතකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් ඉහත රූපයෙන් නිරූපණය වෙයි. $C, D,$ හා E ලක්ෂ්‍යවල දී පිළිවෙළින් 20 kg, 20 kg හා 10 kg භාර තුන රාමු සැකිල්ල දරා සිටියි. රාමු සැකිල්ල, A අචල ලක්ෂ්‍යයට, නිදහස් ලෙස අසව් කර තිබෙයි. C ලක්ෂ්‍යයට යෙදූ F තිරස් බලයක් මගින් CDE තිරස් ව තබා ඇත. F සොයන්න. A හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් සංරචකයත් සිරස් සංරචකයත් සොයන්න.

ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ, ඒ නයින් දඬුවල ඇත්තේ ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න සඳහන් කරමින් දඬු සියල්ලේ ම ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

9. බර W ද, දිග $2a$ ද, වන ඒකාකාර ඉණිමගක්, එහි එක් කෙළවරක් සුමට සිරස් බිත්තියකටත් අනෙක් කෙළවර, ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වූ රළු පොළොවකටත් හේත්තු වන සේ තබා තිබෙයි. ඉණිමගේ බර මෙන් සිව් ගුණයක් බර මිනිසකුට, එය ලිස්සා යන්නේ නැති ව ඉණිමගේ මුළු දිග ම නැගීමට පුළුවන. සුමට කෙළවරේ දී යටියත් සිරස සමග ඉණිමගේ ආනතිය θ නම්, පද්ධතියේ සාධාරණ සමතුලිතතා පිහිටීමක් සැලකීමෙන්,

$$\mu \geqslant \frac{9}{10}\tan\theta$$

බව පෙන්වන්න.

දැන්, ඉණිමගේ අඩිය බිත්තියේ සිට $a\sqrt{2}$ දුරකින් වෙයි නම් ද, $\mu \leqslant \frac{1}{2}$ නම් ද, ඉණිමග ලිස්සන්නේ නැති ව මිනිසාට නැවතත් ඉණිමගේ මුළු දුර ම නැගීමට හැකි වන පරිදි දණ්ඩ හරහා යන සිරස් තලයේ යෙදිය යුතු යුග්මයේ අවම අගය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (අ) *ABC* ත්‍රිකෝණික ආස්තරය, සමජාතීය ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත්තේ එහි තලය සිරස් ව ද, *BC* පාදය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ ද පිහිටන පරිදි ය. h යනු A හි ගැඹුර විට පීඩන කේන්ද්‍රයේ ගැඹුර $\frac{h}{2}$ බව අනුකලනයෙන් හෝ අන් අයුරෙකින් හෝ පෙන්වන්න.

(ආ) *ABC* ත්‍රිකෝණික ආස්තරයක්, ඒකාකාර ඝනත්වයෙන් යුත් ද්‍රවයෙක සිරස් ලෙස ගිල්වා ඇත්තේ, එහි A ශීර්ෂය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ ද B ශීර්ෂය, නිදහස් පෘෂ්ඨයට පහළින් a ගැඹුරකින් ද C ශීර්ෂය, නිදහස් පෘෂ්ඨයට පහළින් b ($\geqslant a$) ගැඹුරකින් ද පවතින පරිදි ය. එහි පීඩන කේන්ද්‍රය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ සිට,

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}$$

ගැඹුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

11. සිරස් කෝණය 2α වන ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුවක් සම්පූර්ණයෙන්ම ජලයේ ගිල්වා ඇත්තේ එක් ජනකයක් ජලය, පෘෂ්ඨයේ තිබෙන ලෙස ය. කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම,

$$W\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$$

බව සාධනය කරන්න. මෙහි W යනු කේතුවෙන් විස්ථාපනය වුණු ජලයේ බර යි.

එම සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම, කේතුවේ **අක්ෂයට** $\cot^{-1}(2\tan\alpha)$ කෝණයෙකින් ආනත බව ද සාධනය කරන්න.

12. අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද ස්කන්ධය M ද වන **ඒකාකාර** නොවන ගෝලයක්, එහි පෘෂ්ඨය මත ඇති P ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ ලුහු තන්තුවක් මගින් එල්ලා තිබෙයි. විශාල ටැංකියක වූ ρ ඒකාකාර ඝනත්වයෙන් යුත් නිශ්චලතාවේ පවතින ද්‍රවයක, ගෝලය අඩක් ගිල්වා ඇත. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය T (>0) වෙයි. O කේන්ද්‍රයේ සිට c දුරකින් ගෝලයේ G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය පිහිටා ඇත. GP මගින් O හි දී θ කෝණයක් ආපාතනය කැරෙයි. නිදහස් ද්‍රව පෘෂ්ඨයේ සිට h ගැඹුරකින් O කේන්ද්‍රය පිහිටයි නම් ද OG, උඩු සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම් ද ද්‍රවය හේතු කොට ගෙන ගෝලය මත ඇති කැරෙන උඩු - තෙරපුමේ විශාලත්වයත් ක්‍රියා රේඛාවත් සොයන්න.

ඒ නයින්, සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී,

(i) $U = \frac{\pi\rho g}{3}(a+h)^2(2a-h)$ විට $T = Mg - U$ බවත්,

(ii) $\alpha = \tan^{-1}\left[\dfrac{T\sin\theta}{T\cos\theta - \dfrac{Mgc}{a}}\right]$ බවත්

පෙන්වන්න.